QUASI-COINCIDENT, INTERIOR DAN CLOSURE PADA TOPOLOGI FUZZY

Siska Dewi Oktaviana[1], Dwi Juniati [2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60321
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60321
email : annavea@ymail.com [1], dwi_juniati@yahoo.com [2]

ABSTRAK

Artikel ini mempelajari keterkaitan antara teori himpunan fuzzy dan topologi. Topologi pada himpunan fuzzy disebut topologi fuzzy. Salah satu topik pada topologi fuzzy mengkaji tentang *quasi-coincident*, persekitaran, *interior*, *closure*, kekompakan dan kontinuitas. Pada artikel ini akan dibahas sifat-sifat *quasi-coincident* dan teorema yang terkait dengan *interior* dan *closure* pada topologi fuzzy. $\tilde{A}$ dikatakan *quasi-coincident* dengan $\tilde{B}$ jika dan hanya jika terdapat $x \epsilon X$ sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) > 1$. Akan dibuktikan, misal $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di *X*, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}^c$ tidak *quasi-coincident*. Jika $\tilde{U}$ adalah Q-persekitaran dari e maka $eq\tilde{U}$. $eq \vee \tilde{A}_j$ jika dan hanya jika terdapat $\tilde{A}_j \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}_j$. Misalkan $\tilde{A}$ adalah sebuah subset dari ruang topologi fuzzy *X*, maka *interior* dari $\tilde{A}$ adalah $\tilde{A}^o = \vee\{\tilde{O} : \tilde{O} \subseteq \tilde{A}, \tilde{O} \epsilon \delta\}$ dan *closure* dari $\tilde{A}$ adalah $\bar{\tilde{A}} = \wedge\{\tilde{K} : \tilde{A} \subseteq \tilde{K}, \tilde{K}^c \epsilon \delta\}$. Akan dibuktikan juga $e \in \tilde{A}^o$ jika dan hanya jika e mempunyai persekitaran yang termuat di $\tilde{A}$. $e \in \bar{\tilde{A}}$ jika dan hanya jika masing-masing Q-persekitaran dari *e* *quasi-coincident* dengan $\tilde{A}$.

Kata kunci : topologi fuzzy, *quasi-coincident*, *interior*, *closure*.

PENDAHULUAN

Himpunan merupakan bagian yang sangat penting di dalam ilmu matematika. Objek-objek dalam himpunan tersebut disebut elemen, unsur atau anggota. Himpunan yang telah dikenal selama ini adalah himpunan klasik. Himpunan klasik sering disebut dengan himpunan tegas, yaitu kumpulan obyek yang keanggotaannya terdefinisi dengan jelas. Pada tahun 1965 seorang ilmuwan Amerika Serikat berkebangsaan Iran, Profesor Lotfi A. Zadeh memperkenalkan sebuah himpunan yang keanggotaannya memiliki nilai kekaburan yang disebut himpunan fuzzy, dengan derajat keanggotaan setiap elemennya pada interval [0,1].

Topologi pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan asal Jerman yang bernama Johann Benedict dalam tulisannya yang berjudul "*Vorstudien zur Topologie*" pada tahun 1847.

Topologi pada himpunan fuzzy disebut topologi fuzzy. Ruang topologi fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh C.L.Chang pada tahun 1968. Pada ruang topologi (X,τ) dengan X adalah himpunan klasik, juga merupakan ruang topologi fuzzy, dimana X sekarang merupakan himpunan fuzzy yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1].

Salah satu materi topologi fuzzy mengkaji tentang *quasi-coincident*, persekitaran, *interior*, *closure*, kekompakan dan kontinuitas. Pada artikel hanya dibahas *quasi-coincident*, *interior* dan *closure* pada topologi fuzzy.

KAJIAN TEORI

2.1 Topologi dan Ruang Topologi

Definisi 2.1.1

Misalkan *X* adalah himpunan tak kosong. Sebuah topologi pada *X* adalah sebuah koleksi τ yang terdiri dari subset-subset *X* yang memenuhi sifat sebagai berikut :

i. $\emptyset \epsilon \tau$ dan $X \epsilon \tau$.
ii. Jika $\mathcal{A}$ subset sebarang dari τ maka $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \in \tau$.
iii. Jika $\mathcal{A}$ subset hingga dari τ maka $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \in \tau$.

Himpunan *X* dengan sebuah topologi τ disebut ruang topologi, dan dinotasikan dengan pasangan berurutan (X, τ).

Definisi 2.1.2

Jika *X* adalah ruang topologi dengan topologinya adalah τ, maka subset dari *X* disebut himpunan terbuka dari X jika subset dari X merupakan anggota τ.

Definisi 2.1.3

A sebuah subset dari ruang topologi X disebut himpunan tertutup jika himpunan X-A merupakan himpunan terbuka.

Definisi 2.1.4

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. $\mathcal{B}$ sebuah subset dari himpunan kuasa X disebut basis untuk sebuah topologi pada X jika memenuhi :

i. Untuk setiap $x \in X$, ada $E \in \mathcal{B}$ dengan E memuat x atau dengan kata lain gabungan dari elemen-elemen di $\mathcal{B}$ sama dengan X.
ii. Untuk setiap $x \in B_1 \cap B_2$, dengan B_1 dan B_2 elemen-elemen $\mathcal{B}$ maka ada $E \in \mathcal{B}$ dengan $x \in E \subset B_1 \cap B_2$.

Definisi 2.1.5

Sebuah subbasis S untuk sebuah topologi pada X adalah koleksi dari subset-subset X dimana gabungannya sama dengan X.

Definisi 2.1.6

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi. Himpunan terbuka U pada X yang memuat x, disebut persekitaran dari x.

Definisi 2.1.7

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan A adalah subset dari X, maka *interior* dari A adalah gabungan dari semua himpunan buka pada X yang termuat di A. *Interior* dari A dinotasikan dengan *Int A* atau A^o.

Proposisi 2.1.1

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan A subset dari X. Jika A merupakan himpunan buka, maka $A = Int\, A$.

Teorema 2.1.1

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dengan $A, B \subset X$, maka :

1. Jika $A \subset B$ maka $A^o \subset B^o$.
2. $(A^o)^o = A^o$.
3. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.
4. $X^o = X, \emptyset^o = \emptyset$.

Definisi 2.1.8

Misalkan (X, τ) ruang topologi dan A adalah subset dari X, maka *closure* dari A adalah irisan dari semua himpunan tutup pada X yang memuat A. *Closure* dari A dinotasikan dengan *Cl A* atau $\bar{A}$.

Proposisi 2.1.2

Misalkan (X, τ) ruang topologi dan A adalah subset dari X. Jika A merupakan himpunan tutup, maka $A = Cl\, A$.

Teorema 2.1.2

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dengan $A, B \subset X$, maka :

1. Jika $A \subset B$ maka $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
3. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
4. $\bar{X} = X, \bar{\emptyset} = \emptyset$.

Teorema 2.1.3

Misalkan A adalah subset dari sebuah ruang topologi X. Maka $x \epsilon \bar{A}$ jika dan hanya jika setiap himpunan buka U yang memuat x beririsan (mempunyai elemen persekutuan) dengan A.

2.2 Himpunan Fuzzy

Definisi 2.2.1

Jika X adalah himpunan tak kosong maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X didefinisikan :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \epsilon X\}$$

dimana $\mu_{\tilde{A}}: X \longrightarrow [0,1]$. Selanjutnya $\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x, dan fungsi $\mu_{\tilde{A}}$ disebut fungsi keanggotaan dari X. Dengan catatan jika derajat keanggotaannya 0, boleh tidak ditulis.

Definisi 2.2.2

I^X adalah koleksi semua himpunan fuzzy pada X.

Representasi Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X dapat dinyatakan dalam beberapa cara :

i. Himpunan pasangan terurut.
ii. Grafik fungsi keanggotaan.
iii. Dalam bentuk deret.
$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$, jika X diskrit dan berhingga dimana $x \epsilon X$. Dengan catatan jika derajat keanggotaannya 0, boleh tidak ditulis.
iv. Dalam bentuk simbol integral.
$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$, jika X kontinu dan tak hingga dimana $x \epsilon X$.

Definisi 2.2.3

(i) Himpunan fuzzy nol pada X dinotasikan $\tilde{0}$ adalah himpunan fuzzy dimana $\mu_{\tilde{0}}(x) = 0, \forall x \in X$.

(ii). Himpunan fuzzy satu pada X dinotasikan $\tilde{1}$ adalah himpunan fuzzy dimana $\mu_{\tilde{1}}(x) = 1, \forall x \in X$.

Definisi 2.2.4

Komplemen dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A}^c$ pada X, dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}{}^c(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$.

Definisi 2.2.5

Gabungan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$,$\tilde{B}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ pada X, dengan derajat keanggotaan
$\mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X$.

Definisi 2.2.6

Irisan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$,$\tilde{B}$ pada X adalah himpunan fuzzy $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ pada X, dengan derajat keanggotaan
$\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X$.

Definisi 2.2.7

Misalkan $\tilde{A}_j$ himpunan fuzzy pada X, $\forall j \epsilon J$ dengan J adalah himpunan indeks, maka gabungan dan irisan berturut-turut pada himpunan fuzzy tersebut didefinisikan :

$$\vee_{j\epsilon J} \mu_{\tilde{A}_j}(x) = sup\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j\epsilon J\right\}, \forall x \in X,$$

$$\wedge_{j\epsilon J} \mu_{\tilde{A}_j}(x) = inf\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j\epsilon J\right\}, \forall x \in X.$$

Definisi 2.2.8

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di X. $\tilde{A}$ disebut himpunan bagian dari $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X$.

Sifat-Sifat Pada Himpunan Fuzzy

1) *Involution*
Untuk $\tilde{A}\epsilon I^X$ berlaku : $(\tilde{A}^c)^c = \tilde{A}$

2) Komutatif
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}\epsilon I^X$ berlaku : $\tilde{A}\wedge\tilde{B} = \tilde{B}\wedge\tilde{A}$
$\tilde{A}\vee\tilde{B} = \tilde{B}\vee\tilde{A}$

3) Asosiatif
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\epsilon I^X$ berlaku : $(\tilde{A}\wedge\tilde{B})\wedge\tilde{C} = \tilde{A}\wedge(\tilde{B}\wedge\tilde{C})$
$(\tilde{A}\vee\tilde{B})\vee\tilde{C} = \tilde{A}\vee(\tilde{B}\vee\tilde{C})$

4) Distributif
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\epsilon I^X$ berlaku :
$$\tilde{A}\wedge(\tilde{B}\vee\tilde{C}) = (\tilde{A}\wedge\tilde{B})\vee(\tilde{A}\wedge\tilde{C})$$
$$\tilde{A}\vee(\tilde{B}\wedge\tilde{C}) = (\tilde{A}\vee\tilde{B})\wedge(\tilde{A}\vee\tilde{C})$$

5) Identitas
Untuk $\tilde{A}\epsilon I^X$ berlaku : $\tilde{A} \vee \emptyset = \tilde{A}$
$\tilde{A} \wedge X = \tilde{A}$

6) Hukum De Morgan's
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}\epsilon I^X$ berlaku : $(\tilde{A}\wedge\tilde{B})^c = \tilde{A}^c\vee\tilde{B}^c$
$(\tilde{A}\vee\tilde{B})^c = \tilde{A}^c\wedge\tilde{B}^c$

7) *Idempoten*
Untuk $\tilde{A}\epsilon I^X$ berlaku : $\tilde{A}\vee\tilde{A} = \tilde{A}$
$\tilde{A}\wedge\tilde{A} = \tilde{A}$

8) *Absorption*
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}\epsilon I^X$ berlaku : $\tilde{A}\wedge(\tilde{A}\vee\tilde{B}) = \tilde{A}$
$\tilde{A}\vee(\tilde{A}\wedge\tilde{B}) = \tilde{A}$

9) *Absorption* oleh X dan $\emptyset$
Untuk $\tilde{A}\epsilon I^X$ berlaku : $\tilde{A}\vee X = X$
$\tilde{A}\wedge\emptyset = \emptyset$

10) Rumus ekuivalen
Untuk $\tilde{A}, \tilde{B}\epsilon I^X$ berlaku :
$$(\tilde{A}^c\vee\tilde{B})\wedge(\tilde{A}\vee\tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c\wedge\tilde{B}^c)\vee(\tilde{A}\wedge\tilde{B})$$
$$(\tilde{A}^c\wedge\tilde{B})\vee(\tilde{A}\wedge\tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c\vee\tilde{B}^c)\wedge(\tilde{A}\vee\tilde{B}).$$

PEMBAHASAN

3.1 Topologi fuzzy

Definisi 3.1.1

Sebuah koleksi himpunan fuzzy $\delta \subseteq I^X$ disebut topologi fuzzy pada X jika memenuhi aksioma sebagai berikut :

i. $\tilde{0}\epsilon\delta, \tilde{1}\epsilon\delta$.
ii. $\forall\tilde{A}, \tilde{B}\epsilon\delta \Rightarrow \tilde{A}\wedge\tilde{B}\epsilon\delta$.
iii. $\forall(\tilde{A}_j)_{j\epsilon J}\epsilon\delta \Rightarrow \vee_{j\epsilon J}\tilde{A}_j\epsilon\delta$.

Pasangan berurutan (X,δ) disebut ruang topologi fuzzy.

Definisi 3.1.2

Jika δ adalah suatu topologi fuzzy pada X, maka anggota-anggota dari δ disebut himpunan fuzzy buka.

Definisi 3.1.3

Himpunan fuzzy $\tilde{K}$ dikatakan tertutup jika $\tilde{K}^c\epsilon\delta$. Dinotasikan dengan δ^c untuk semua koleksi himpunan fuzzy tutup di ruang topologi fuzzy δ.

Definisi 3.1.4

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. $\mathcal{B}$ subkoleksi himpunan dari δ disebut basis dari topologi fuzzy δ jika dan hanya jika untuk setiap $\tilde{A}\epsilon\delta$, terdapat himpunan indeks J dengan $\{\tilde{A}_j\}_{j\epsilon J} \subset \mathcal{B}$, sehingga $\tilde{A} = \vee_{j\epsilon J}\tilde{A}_j$.

Definisi 3.1.5

S subkoleksi himpunan dari δ disebut subbasis dari δ jika dan hanya jika koleksi semua irisan berhingga anggota S membentuk suatu basis dari topologi fuzzy δ.

3.2 Titik Fuzzy dan *Quasi-coincident*

Definisi 3.2.1

Titik fuzzy P_x^λ, dengan $0 < \lambda \leq 1$, $x\epsilon X$, adalah himpunan fuzzy khusus dengan derajat keanggotaan didefinisikan

$$P_x^\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, x = y \\ 0, x \neq y \end{cases}.$$

Definisi 3.2.2

Titik fuzzy P_x^λ dikatakan termuat pada himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $P_x^\lambda \epsilon \tilde{A}$ jika dan hanya jika $\lambda \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Definisi 3.2.3

Dua himpunan fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B}$ di X dikatakan beririsan jika dan hanya jika ada $x\epsilon X$ sehingga $\mu_{\tilde{A}\wedge\tilde{B}}(x) \neq 0$. Untuk kasus seperti ini dikatakan bahwa $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ beririsan di *x*.

Definisi 3.2.4

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di (X, δ) disebut persekitaran dari titik fuzzy P_x^λ jika dan hanya jika ada $\tilde{B}\epsilon\delta$ sehingga $P_x^\lambda \epsilon \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$.

Definisi 3.2.5

Titik fuzzy P_x^λ dikatakan *quasi-coincident* dengan $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $P_x^\lambda q \tilde{A}$ jika dan hanya jika $\lambda + \mu_{\tilde{A}}(x) > 1$.

Definisi 3.2.6

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada *X*. $\tilde{A}$ dikatakan *quasi-coincident* dengan $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A}q\tilde{B}$ jika dan hanya jika terdapat $x\epsilon X$ sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) > 1$. Juga dapat dikatakan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ *quasi-coincident* di *x*. Bahwa jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ *quasi-coincident* di *x*, maka $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$ kedua-duanya tak nol oleh karena itu $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ beririsan di *x*.

Definisi 3.2.7

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di (X, δ) disebut Q-persekitaran dari P_x^λ jika dan hanya jika terdapat $\tilde{B} \in \delta$ sehingga $P_x^\lambda q \tilde{B}$ dan $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$.

Proposisi 3.2.1

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di *X*.

(i) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}^c$ tidak *quasi-coincident.*

(ii) $P_x^\lambda \epsilon \tilde{A}$ jika dan hanya jika P_x^λ tidak *quasi-coincident* dengan $\tilde{A}^c$.

Bukti :

(i) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}^c$ tidak *quasi-coincident.*

$\Leftarrow$ $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}^c$ tidak *quasi-coincident* jika dan hanya jika untuk $\forall x\epsilon X$ sehingga

$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{(\tilde{B}^c)^c}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 - \mu_{\tilde{B}^c}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}^c}(x) \leq 1$
$\mu_{\tilde{A}}(x) + 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1$
$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

Berdasarkan Definisi 2.2.5,
$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x\epsilon X$, jadi $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

(ii) $P_x^\lambda \epsilon \tilde{A}$ jika dan hanya jika P_x^λ tidak *quasi-coincident* dengan $\tilde{A}^c$.

$\Leftarrow$ P_x^λ tidak *quasi-coincident* dengan $\tilde{A}^c$ jika dan hanya jika

$\lambda + \mu_{\tilde{A}^c}(x) \leq 1$
$\lambda + 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$
$\lambda \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$...(**)

Berdasarkan Definisi 3.2.2 $P_x^\lambda \epsilon \tilde{A}$ jika dan hanya jika $\lambda \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$. Berdasarkan (**) maka $P_x^\lambda \epsilon \tilde{A}$. ■

Proposisi 3.2.2

Misalkan U_e koleksi Q-persekitaran dari titik fuzzy *e* di (X, δ). Maka :

1. Jika $\tilde{U}\epsilon U_e$, maka *e quasi-coincident* dengan
2. Jika $\tilde{U}, \tilde{V}\epsilon U_e$, maka $\tilde{U}\wedge\tilde{V}\epsilon U_e$.
3. Jika $\tilde{U}\epsilon U_e$ dan $\tilde{U} \subset \tilde{V}$, maka $\tilde{V}\epsilon U_e$.

Jika $\tilde{U}\epsilon U_e$, maka ada $\tilde{V}\epsilon U_e$ sehingga $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ dan $\tilde{V}\epsilon U_d$ untuk setiap titik fuzzy *d quasi-coincident* dengan $\tilde{V}$.

Bukti :

1. $\tilde{U}\epsilon U_e$, $e = P_x^\lambda$, berdasarkan Definisi 3.2.7, himpunan fuzzy $\tilde{U}$ di (X, δ) disebut Q-persekitaran dari P_x^λ jika dan hanya jika terdapat $\tilde{A} \in \delta$, sehingga $P_x^\lambda q \tilde{A}$ dan $\tilde{A} \subseteq \tilde{U}$ maka
   $\lambda > \mu_{\tilde{A}^c}(x)$,
   $\lambda > 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$,
   $\mu_{\tilde{A}}(x) > 1 - \lambda$, dan $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{U}}(x), \forall x \in X$ maka
   $1 - \lambda < \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{U}}(x)$, akibatnya
   $1 - \lambda < \mu_{\tilde{U}}(x)$,
   $\lambda > 1 - \mu_{\tilde{U}}(x)$,
   $\lambda > \mu_{\tilde{U}^c}(x)$,
   Jadi $P_x^\lambda q \tilde{U}$ atau $eq\tilde{U}$.
2. $\tilde{U}, \tilde{V}\epsilon U_e$, maka terdapat $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}_1$, $eq\tilde{A}_2$ dan $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{U}, \tilde{A}_2 \subseteq \tilde{V}$. Karena $eq\tilde{A}_1$ dan $eq\tilde{A}_2$ maka
   $\lambda > 1 - \mu_{\tilde{A}_1}(x)$ dan $\lambda > 1 - \mu_{\tilde{A}_2}(x)$,
   $\mu_{\tilde{A}_1}(x) > 1 - \lambda$ dan $\mu_{\tilde{A}_2}(x) > 1 - \lambda$ sehingga
   $min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x)\} > 1 - \lambda$,
   $\lambda > 1 - min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x)\}, \forall x \in X$ maka $eq\tilde{A}_1\wedge\tilde{A}_2$.
   $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{U}$,
   $\mu_{\tilde{A}_1}(x) \leq \mu_{\tilde{U}}(x), \forall x \in X$,
   $\tilde{A}_2 \subseteq \tilde{V}$,

$\mu_{\tilde{A}_2}(x) \leq \mu_{\tilde{V}}(x), \forall x \in X$ maka $\mu_{(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2)}(x) \leq \mu_{(\tilde{U} \wedge \tilde{V})}(x)$.
Karena $eq(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2)$ dan $(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) \subseteq (\tilde{U} \wedge \tilde{V})$ maka $eq\tilde{U} \wedge \tilde{V}$. Jadi $\tilde{U} \wedge \tilde{V} \epsilon U_e$.

3. $\tilde{U} \epsilon U_e$ jika dan hanya jika terdapat $\tilde{A} \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}$ dan $\tilde{A} \subseteq \tilde{U}$. Karena $\tilde{U} \epsilon U_e$ maka $eq\tilde{U}$, dan $\tilde{U} \subset \tilde{V}$ sehingga
$\lambda > \mu_{\tilde{U}^c}(x)$ (berdasarkan Definisi 3.2.5)
$\lambda > 1 - \mu_{\tilde{U}}(x)$
$\mu_{\tilde{U}}(x) > 1 - \lambda$, dan $\mu_{\tilde{U}}(x) < \mu_{\tilde{V}}(x)$
$1 - \lambda < \mu_{\tilde{U}}(x) < \mu_{\tilde{V}}(x)$
maka $\mu_{\tilde{V}}(x) > 1 - \lambda$
$\lambda + \mu_{\tilde{V}}(x) > 1$, maka $eq\tilde{V}$. Jadi $\tilde{V} \epsilon U_e$.
4. $\tilde{U} \epsilon U_e$ jika dan hanya jika terdapat $\tilde{V} \in \delta$ sehingga $eq\tilde{V}$ dan $\tilde{V} \subset \tilde{U}$, maka $\tilde{V}$ juga merupakan Q-persekitaran dari *e*, $\tilde{V} \epsilon U_e$. Dan untuk setiap titik fuzzy *d* sehingga $dq\tilde{V}$, maka $\tilde{V}$ adalah Q-persekitaran dari *d*. ■

Proposisi 3.2.3

Misalkan $\{\tilde{A}_j\}_{j \epsilon J}$ koleksi himpunan fuzzy di *X*. Titik fuzzy *e quasi-coincident* dengan $\vee \tilde{A}_j$ jika dan hanya jika ada $\tilde{A}_j \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}_j$.

Bukti :

⇒ Misal $e = P_x^\lambda$, $eq \vee \tilde{A}_j \Leftrightarrow$ terdapat $\tilde{A}_j \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}_j$ dan $\tilde{A}_j \subset \vee \tilde{A}_j$ maka $\tilde{A}_j$ merupakan Q-persekitaran dari *e* (berdasarkan Proposisi 3.2.2 bagian 4). Jika $\tilde{A}_j$ merupakan Q-persekitaran dari *e* maka $eq\tilde{A}_j$ (berdasarkan Proposisi 3.2.2 bagian 1). Jadi terbukti $eq\tilde{A}_j$. ■

Proposisi 3.2.4

Subkoleksi himpunan $\mathcal{B}$ dari topologi fuzzy δ pada *X* adalah basis dari δ jika dan hanya jika untuk setiap titik fuzzy *e* di (X, δ) dan untuk setiap Q-persekitaran buka $\tilde{U}$ dari *e*, terdapat $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ sehingga $eq\tilde{B} \subset \tilde{A}$.

Bukti :

⇒ Jika untuk setiap e di (X, δ) dan untuk setiap Q-persekitaran buka $\tilde{U}$ dari *e* terdapat $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ sehingga $eq\tilde{B} \subset \tilde{A}$. Andaikan $\mathcal{B}$ bukan basis dari δ, maka terdapat $\tilde{A} \in \delta$ sehingga
$\tilde{G} = \{\tilde{B} \in \mathcal{B} : \tilde{B} \subset \tilde{A}\}$, $\tilde{G} \neq \tilde{A}$, karena itu ada $x \epsilon X$ sehingga
$\mu_{\tilde{G}}(x) < \mu_{\tilde{A}}(x)$, misal $e = P_x^\lambda$ dengan
$\lambda = 1 - \mu_{\tilde{G}}(x)$,
$1 - \mu_{\tilde{G}}(x) = \mu_{\tilde{G}^c}(x)$ maka $\lambda = \mu_{\tilde{G}^c}(x)$, yang mana λ selalu positif.
Jika $\mu_{\tilde{G}}(x) < \mu_{\tilde{A}}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{G}}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{(\tilde{G}^c)^c}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) > 1 - \mu_{\tilde{G}^c}(x)$
$\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{G}^c}(x) > 1$
$\mu_{\tilde{A}}(x) + \lambda > 1$ (berdasarkan Definisi 3.2.5)
Jadi $eq\tilde{A}$...(*)
Tetapi untuk sebarang $\tilde{B} \in \mathcal{B}$, yang mana $\tilde{B}$ termuat di $\tilde{A}$ adalah termuat di $\tilde{G}$, maka :
$\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{G}}(x)$
$\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{(\tilde{G}^c)^c}(x)$
$\mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1 - \mu_{\tilde{G}^c}(x)$
$\mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{G}^c}(x) \leq 1$
$\mu_{\tilde{B}}(x) + \lambda \leq 1$ (berdasarkan Definisi 3.2.5)
e tidak *quasi-coincident* dengan $\tilde{B}$...(**)
Dari (*) dan (**) kontradiksi dengan $eq\tilde{B} \subset \tilde{A}$, maka pengandaian salah.
Jadi $\mathcal{B}$ basis dari (X, δ). ■

3.3 *Interior* dan *Closure* pada Topologi Fuzzy

Definisi 3.3.1

Misalkan $\tilde{A}$ subset dari ruang topologi fuzzy *X*, maka *interior* $\tilde{A}$ adalah gabungan dari semua subset buka pada *X* yang termuat di $\tilde{A}$, dinotasikan $\tilde{A}^o = \vee \{\tilde{O} : \tilde{O} \subseteq \tilde{A}, \tilde{O} \epsilon \delta\}$.

Definisi 3.3.2

Misalkan $\tilde{A}$ subset dari ruang topologi fuzzy *X*, maka *closure* $\tilde{A}$ adalah irisan dari semua subset tutup pada *X* yang memuat $\tilde{A}$, dinotasikan $\bar{\tilde{A}} = \wedge \{\tilde{K} : \tilde{A} \subseteq \tilde{K}, \tilde{K}^c \epsilon \delta\}$.

Teorema 3.3.1

Titik fuzzy $e \in \tilde{A}^o$ jika dan hanya jika *e* mempunyai persekitaran yang termuat di $\tilde{A}$.

Bukti :

⇒ Jika titik fuzzy $e \in \tilde{A}^o$, maka $e \in \vee \{\tilde{O} : \tilde{O} \subseteq \tilde{A}, \tilde{O} \in \delta\}$, sehingga *e* merupakan elemen dari himpunan fuzzy buka $\tilde{O}$ $(e \in \tilde{O})$. Berdasarkan Definisi 3.2.4, $\tilde{O} \in \delta, \tilde{O} \subseteq \tilde{A}$ maka $e \in \tilde{O} \subseteq \tilde{A}$. Jadi *e* mempunyai persekitaran yang termuat di $\tilde{A}$. ■

Teorema 3.3.2

Titik fuzzy $e = P_x^\lambda \in \bar{\tilde{A}}$ jika dan hanya jika tiap-tiap Q-persekitaran dari *e quasi-coincident* dengan $\tilde{A}$.

Bukti :

⇐ Misalkan $\tilde{U}$ Q-persekitaran dari *e* dan $\tilde{U}q\tilde{A}$. Berdasarkan Definisi 3.2.6 $\tilde{U}q\tilde{A}$ di $x \Rightarrow \mu_{\tilde{U} \wedge \tilde{A}}(x) \neq 0$. Andaikan $e = P_x^\lambda \notin \bar{\tilde{A}}$, diambil himpunan fuzzy $\tilde{U}$, dimana $\tilde{U} = X - \bar{\tilde{A}}$, maka $\tilde{U}$ adalah himpunan fuzzy buka yang memuat *x*, sehingga $\mu_{\tilde{U} \wedge \tilde{A}}(x) = 0$. Kontradiksi dengan $\mu_{\tilde{U} \wedge \tilde{A}}(x) \neq 0$ maka pengandaian salah. Jadi $e = P_x^\lambda \in \bar{\tilde{A}}$. ■

Teorema 3.3.3

$\tilde{A}^o = \overline{(\tilde{A}^c)}^c$, $\bar{\tilde{A}} = \left((\tilde{A}^c)^o\right)^c$, $(\bar{\tilde{A}})^c = (\tilde{A}^c)^o$, $\overline{(\tilde{A}^c)} = (\tilde{A}^o)^c$.

Bukti :

- $\tilde{A}^o = \overline{(\tilde{A}^c)}^c$

Misal $\tilde{A}^o = \{\tilde{A}_j : \tilde{A}_j \in \delta \text{ dan } \tilde{A}_j \subset \tilde{A}\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1, $\tilde{A}^o = \vee\{\tilde{A}_j : \tilde{A}_j \subset \tilde{A},\ \tilde{A}_j \in \delta\}$, sehingga diperoleh $\tilde{A}^o = \vee\tilde{A}^o$ untuk $(\tilde{A}^o)^c = \{\tilde{A}^c : \tilde{A}_j \in \tilde{A}^o\}$. Maka $(\tilde{A}^o)^c$ adalah koleksi semua himpunan fuzzy tutup yang memuat $\tilde{A}^c$. Karena itu $\overline{(\tilde{A}^c)} = \wedge\{\tilde{A}^c : \tilde{A}_j \in \tilde{A}^o\}$,

$\overline{(\tilde{A}^c)} = \wedge(\tilde{A}^o)^c$. Berdasarkan hukum De Morgan's

$\overline{(\tilde{A}^c)}^c = (\wedge(\tilde{A}^o)^c)^c$

$\overline{(\tilde{A}^c)}^c = \vee((\tilde{A}^o)^c)^c$

$\overline{(\tilde{A}^c)}^c = \vee\tilde{A}^o$

$\overline{(\tilde{A}^c)}^c = \tilde{A}^o$.

- $\bar{\tilde{A}} = \left((\tilde{A}^c)^o\right)^c$

Misal $\bar{\tilde{A}} = \{\tilde{A}_j : \tilde{A}_j \in \delta^c \text{ dan } \tilde{A} \subset \tilde{A}_j\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.2, $\bar{\tilde{A}} = \wedge\{\tilde{A}_j : \tilde{A} \subset \tilde{A}_j, \tilde{A}_j \in \delta^c\}$,

$\bar{\tilde{A}} = \wedge\bar{\tilde{A}}$...(*)

Misal $(\tilde{A}^c)^o = \{\tilde{A}_j{}^c : \tilde{A}_j{}^c \in \delta \text{ dan } \tilde{A}_j{}^c \subset \tilde{A}^c\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1 jika $\tilde{A}^c$ *interior* maka $(\tilde{A}^c)^o = \vee\{\tilde{A}_j{}^c : \tilde{A}_j{}^c \subset \tilde{A}^c, \tilde{A}_j{}^c \in \delta\}$,sehingga diperoleh $(\tilde{A}^c)^o = \vee(\tilde{A}^c)^o$ untuk $((\tilde{A}^c)^o)^c = \{(\tilde{A}^c)^c : \tilde{A}_j{}^c \in (\tilde{A}^c)^o\}$,

$((\tilde{A}^c)^o)^c = \{\tilde{A} : \tilde{A}_j{}^c \in (\tilde{A}^c)^o\}$. Maka $((\tilde{A}^c)^o)^c$ adalah koleksi semua himpunan fuzzy tutup yang memuat $\tilde{A}$, karena itu

$\bar{\tilde{A}} = \{\tilde{A} : \tilde{A}_j{}^c \in (\tilde{A}^c)^o\}$

$\bar{\tilde{A}} = ((\tilde{A}^c)^o)^c$.

Berdasarkan Definisi 3.3.2,

$\bar{\tilde{A}} = \wedge\{\tilde{A} : \tilde{A}_j{}^c \in (\tilde{A}^c)^o\}$

$\bar{\tilde{A}} = \wedge((\tilde{A}^c)^o)^c$ berdasarkan (*)

$\bar{\tilde{A}} = ((\tilde{A}^c)^o)^c$.

- $(\bar{\tilde{A}})^c = (\tilde{A}^c)^o$

Berdasarkan $\bar{\tilde{A}} = \left((\tilde{A}^c)^o\right)^c$ telah terbukti maka $(\bar{\tilde{A}})^c = \left(\left((\tilde{A}^c)^o\right)^c\right)^c$.

Berdasarkan sifat *involution* maka $(\bar{\tilde{A}})^c = (\tilde{A}^c)^o$.

- $\overline{(\tilde{A}^c)} = \left(\tilde{A}^o\right)^c$

Berdasarkan $(\overline{(\tilde{A}^c)})^c = \tilde{A}^o$ telah terbukti maka $((\overline{(\tilde{A}^c)})^c)^c = (\tilde{A}^o)^c$. Berdasarkan sifat *involution* maka $\overline{(\tilde{A}^c)} = \left(\tilde{A}^o\right)^c$. ■

Teorema 3.3.4

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. Maka,

i. $\tilde{0}^o = \tilde{0}$, $\tilde{1}^o = \tilde{1}$.

ii. $\tilde{A}^o \subseteq \tilde{A}$.

iii. $\tilde{A}^{oo} = \tilde{A}^o$.

iv. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}^o \subseteq \tilde{B}^o$.

v. $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^o = \tilde{A}^o \wedge \tilde{B}^o$.

Bukti :

i. $\tilde{0} \in \delta$ maka $\tilde{0}$ merupakan himpunan fuzzy buka pada *X*.
$\tilde{0}^o = \vee\{\tilde{A} : \tilde{A} \subseteq \tilde{0}, \tilde{A} \in \delta\} = \tilde{0}$,
$\tilde{1} \in \delta$ maka $\tilde{1}$ merupakan himpunan fuzzy buka pada *X*.
$\tilde{1}^o = \vee\{\tilde{A} : \tilde{A} \subseteq \tilde{1}, \tilde{A} \in \delta\} = \tilde{1}$.

ii. $\tilde{A}^o = \vee\{\tilde{U}_j : \tilde{U}_j \subseteq \tilde{A}, \tilde{U}_j \epsilon \delta\}$,berdasarkan Definisi 3.3.1 maka
$\tilde{A}^o = \vee_{j\epsilon J}\tilde{U}_j, \tilde{U}_j \subseteq \tilde{A}, \tilde{U}_j \epsilon \delta$, karena $\forall \tilde{U}_j, \tilde{U}_j \subseteq \tilde{A}$ maka diperoleh $\vee_{j\epsilon J}\tilde{U}_j \subseteq \tilde{A}$. Jadi $\tilde{A}^o \subseteq \tilde{A}$.

iii. Akan dibuktikan $\tilde{A}^{oo}$ merupakan himpunan fuzzy buka terbesar yang termuat di $\tilde{A}^o$.
Jika $\tilde{U}$ himpunan fuzzy buka dengan $\tilde{A}^{oo} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{A}^o$, maka
$\tilde{U} \subseteq \vee\{\tilde{U} : \tilde{U} \subseteq \tilde{A}^o, \tilde{U}\epsilon\delta\} = \tilde{A}^{oo}$. Karena $\tilde{A}^{oo} \subseteq \tilde{U}$ dan $\tilde{U} \subseteq \tilde{A}^{oo}$ sehingga $\tilde{U} = \tilde{A}^{oo}$. Jadi terbukti $\tilde{A}^{oo}$ adalah himpunan fuzzy buka terbesar yang termuat di $\tilde{A}^o$. $\tilde{A}^{oo} \subseteq \tilde{A}^o$...(*)
Disisi lain $\tilde{A}^o$ himpunan fuzzy buka, karena $\tilde{A}^o$ merupakan gabungan himpunan fuzzy buka yang termuat di $\tilde{A}$, sehingga
$\tilde{A}^o \subseteq \vee\{\tilde{U} : \tilde{U} \subseteq \tilde{A}^o, \tilde{U}\epsilon\delta\}$ akibatnya
$\tilde{A}^o \subseteq \tilde{A}^{oo}$...(**)
Berdasarkan (*) dan (**) $\tilde{A}^{oo} = \tilde{A}^o$.

iv. Karena $\tilde{A}^o$ adalah himpunan fuzzy buka terbesar yang termuat di $\tilde{A}$. Kemudian $\tilde{A}$ termuat di $\tilde{B}$ maka $\tilde{A}^o \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$. Karena $\tilde{B}^o$ adalah himpunan fuzzy buka terbesar yang termuat di $\tilde{B}$ maka $\tilde{A}^o \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{B}^o \subseteq \tilde{B}$. Jadi $\tilde{A}^o \subseteq \tilde{B}^o$.

v. $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^o = \tilde{A}^o \wedge \tilde{B}^o$

- Akan dibuktikan $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^o \subseteq \tilde{A}^o \wedge \tilde{B}^o$.
Misal $\tilde{C} = (\tilde{A} \wedge \tilde{B})^o$. Maka $\tilde{C}$ adalah himpunan fuzzy buka dan termuat di keduanya $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ termuat di keduanya $\tilde{A}^o$ dan $\tilde{B}^o$, sehingga $\tilde{A}^o$ dan $\tilde{B}^o$ adalah himpunan fuzzy buka terbesar di $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ berturut-turut.
- Akan dibuktikan $\tilde{A}^o \wedge \tilde{B}^o \subseteq \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^o$.
Misal $\tilde{D} = \tilde{A}^o \wedge \tilde{B}^o$. Jadi $\tilde{D}$ adalah himpunan fuzzy buka dan subset dari keduanya $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, sehingga subset dari $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$, oleh karena itu subset dari $\left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^o$. Sehingga $\left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^o$ himpunan fuzzy buka terbesar yang termuat di $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$. ■

Teorema 3.3.5

Misalkan (X, δ) adalah ruang topologi fuzzy. Maka,

i. $\bar{\tilde{0}} = \tilde{0},\ \bar{\tilde{1}} = \tilde{1}$.

ii. $\tilde{A} \subseteq \bar{\tilde{A}}$.

iii. $\bar{\bar{\tilde{A}}} = \bar{\tilde{A}}$.

iv. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \bar{\tilde{A}} \subseteq \bar{\tilde{B}}$.

v. $\overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})} = \bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}}$.

Bukti :

i. $\tilde{0} \in \delta, \tilde{0}^c = \tilde{1} \in \delta$, karena $\tilde{0}^c \in \delta$ maka $\tilde{0}$ tertutup,
$\tilde{1} \in \delta, \tilde{1}^c = \tilde{0} \in \delta$, karena $\tilde{1}^c \in \delta$ maka $\tilde{1}$ tertutup,
$\bar{\tilde{0}} = \wedge\left\{\tilde{A} : \tilde{0} \subseteq \tilde{A}, \tilde{A} \in \delta^c\right\} = \tilde{0}$,
$\bar{\tilde{1}} = \wedge\left\{\tilde{A} : \bar{\tilde{1}} \subseteq \tilde{A}, \tilde{A} \in \delta^c\right\} = \tilde{1}$.

ii. $\bar{\tilde{A}} = \wedge\left\{\widetilde{K} : \tilde{A} \subseteq \widetilde{K}, \widetilde{K} \in \delta^c\right\}$,
$\tilde{A} \subseteq \widetilde{K} \subseteq \bar{\tilde{A}}$ sehingga $\tilde{A} \subseteq \bar{\tilde{A}}$.

iii. Akan dibuktikan $\bar{\bar{\tilde{A}}}$ merupakan himpunan fuzzy tutup terkecil yang memuat $\bar{\tilde{A}}$.
Jika $\widetilde{K}$ himpunan fuzzy tutup dengan $\bar{\tilde{A}} \subseteq \widetilde{K} \subseteq \bar{\bar{\tilde{A}}}$, maka
$\bar{\bar{\tilde{A}}} = \wedge\left\{\widetilde{K} : \bar{\tilde{A}} \subseteq \widetilde{K}, \widetilde{K} \in \delta^c\right\} \subseteq \widetilde{K}$. Karena $\widetilde{K} \subseteq \bar{\bar{\tilde{A}}}$ dan $\bar{\bar{\tilde{A}}} \subseteq \widetilde{K}$ sehingga $\widetilde{K} = \bar{\bar{\tilde{A}}}$. Jadi terbukti $\bar{\bar{\tilde{A}}}$ himpunan fuzzy tutup terkecil yang memuat $\bar{\tilde{A}}$.
$\bar{\tilde{A}} \subseteq \bar{\bar{\tilde{A}}}$ ...(*)
Disisi lain $\bar{\tilde{A}}$ himpunan fuzzy tutup, karena $\bar{\tilde{A}}$ merupakan irisan himpunan fuzzy tutup yang memuat $\tilde{A}$, sehingga
$\bar{\bar{\tilde{A}}} = \wedge\left\{K : \bar{\tilde{A}} \subseteq \widetilde{K}, \widetilde{K} \in \delta^c\right\} \subseteq \bar{\tilde{A}}$ akibatnya
$\bar{\bar{\tilde{A}}} \subseteq \bar{\tilde{A}}$...(**).
Berdasarkan (*) dan (**) $\bar{\bar{\tilde{A}}} = \bar{\tilde{A}}$.

iv. $\bar{\tilde{A}} = \wedge\left\{K : \tilde{A} \subseteq \widetilde{K}, \widetilde{K} \in \delta^c\right\}$,
$\tilde{A} \subseteq \widetilde{K} \subseteq \bar{\tilde{A}}$ sehingga $\tilde{A} \subseteq \bar{\tilde{A}}$.
$\bar{\tilde{B}} = \wedge\{\tilde{L} : \tilde{B} \subseteq \tilde{L}, \tilde{L} \in \delta^c\}$,
$\tilde{B} \subseteq \tilde{L} \subseteq \bar{\tilde{B}}$ sehingga $\tilde{B} \subseteq \bar{\tilde{B}}$.
$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, maka $\tilde{A} \subseteq \bar{\tilde{A}} \subseteq \tilde{B} \subseteq \bar{\tilde{B}}$ sehingga $\bar{\tilde{A}} \subseteq \bar{\tilde{B}}$.

v. $\tilde{A} \subseteq \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) \Rightarrow \bar{\tilde{A}} \subseteq \overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})}$,
$\tilde{B} \subseteq \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) \Rightarrow \bar{\tilde{B}} \subseteq \overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})}$, jadi
$\bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}} \subseteq \overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})}$.
Di sisi lain jika $\bar{\tilde{A}}$ dan $\bar{\tilde{B}}$ adalah himpunan fuzzy tutup yang memuat $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ berturut-turut maka $\bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}}$ adalah himpunan fuzzy tutup yang memuat $\tilde{A} \vee \tilde{B}$. Sedangkan $\overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})}$ adalah himpunan fuzzy tutup terkecil yang memuat $\tilde{A} \vee \tilde{B}$. $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) \subseteq \overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})} \subseteq \bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}}$ sehingga $\overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})} \subseteq \bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}}$.
Jadi $\overline{(\tilde{A} \vee \tilde{B})} = \bar{\tilde{A}} \vee \bar{\tilde{B}}$. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa :

1. Sifat-sifat *quasi-coincident* pada topologi fuzzy antara lain :
   a. Misal $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy di *X*. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ tidak *quasi-coincident* dengan $\tilde{B}^c$.
   b. Jika $\widetilde{U}$ Q-persekitaran dari *e* maka $eq\widetilde{U}$.
   c. $eq \vee \tilde{A}_j \Leftrightarrow \exists \tilde{A}_j \in \delta$ sehingga $eq\tilde{A}_j$.

Sifat-sifat *quasi-coincident* digunakan untuk menentukan Q-Persekitaran, basis dan *closure* pada topologi fuzzy.

2. Setiap teorema pada *interior* dan *closure* pada topologi juga berlaku pada topologi fuzzy.
3. Setiap definisi, sifat-sifat dan teorema pada topologi juga berlaku pada topologi fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Carlson, Steve. 2010. *Fuzzy Sets and Fuzzy Topologies : Early Ideas and Obstacles*. New York : Rose-Hulman Institute of Technology. http://www.rose-hulman.edu/math/seminar/seminarfiles/2005-06/abstract2006-05-10.pdf, diakses pada : 06-04-2012 22:27. [2] Juniati, Dwi. 2013. *Topologi Dasar*. Surabaya: Unesa .

[3] Lee K.H. 2005. *First Course On Fuzzy Theory and Application*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[4] Palaniappan, N. 2007. *Fuzzy Topology, Second Edition*. UK : Alpha Science International Ltd.

[5] Shi W, Liu K. 2006. *A fuzzy topology for computing the interior,boundary,and exterior of spatial objects quantitatively in GIS*. Hongkong : The Hongkong Polythechnic University. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.132.8514&rep=rep1&type=pdf, diakses pada : 18-02-2013 21:41.

[6] Smith, Trey. 2003. *Topology Definition and Theorems*. http://www.angelo.edufacultytsmith00main.pdf, diakses pada : 09-07-2013 23:32.

[7] Zimmermann.H.J. 1992. *Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Second, Revised Edition*. Massachusetts : Kluwer Academic Publishers.